Question :

(Inspiré de l'écrit de la Banque de France 2008)
Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $M = (M_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice carrée d'ordre n, avec $n \geq 2$, définie par $M_{ii} = a$ si $1 \leq i \leq n$ et $M_{ij} = b$ si $1 \leq i \neq j \leq n$. On note I la matrice identité d'ordre n.

a) Montrer que M est diagonalisable et possède au moins deux valeurs propres réelles distinctes que l'on notera λ et μ.

b) Montrer qu'il existe deux suites réelles $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ telles que $M^p = \alpha_p M + \beta_p I$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et que ces suites sont récurrentes linéaires d'ordre 2.

c) Exprimer α_p et β_p en fonction de λ et μ.

[0] © 2010, Dany-Jack Mercier, tous droits réservés. Site internet MegaMaths.